**Tema. Notación Factorial.**

**Motivación del tema.** ¿En cuántas formas diferentes se pueden plantar en círculo 5 árboles?

**Solución.** Para entender lo que queremos observemos que los siguientes diagramas representan la misma forma de plantar los árboles

Basta girar el primer gráfico en el sentido contrario a las manecillas del reloj para obtener el segundo gráfico. Para obtener plantaciones diferentes fijemos el árbol 1 y cambiemos de lugar los demás árboles, por ejemplo, el siguiente diagrama es una plantación diferente

Para obtener el número total de plantaciones, como ya dijimos fijamos el árbol 1 en el lugar en que está, pasamos al siguiente círculo y podemos plantar 4 de los árboles disponibles, en el siguiente círculo podemos plantar 3 de los árboles restantes, en el siguiente círculo podemos plantar 2 de los árboles que nos quedan para que finalmente en el círculo restante podemos plantar un árbol. Entonces por el principio fundamental del conteo el total de plantaciones es

Esta forma de multiplicar un número por los números anteriores hasta 1 aparece frecuentemente en probabilidad y se llama factorial y se denota por 4!

**Ejemplo 6.** Calculamos el factorial de un entero positivo como:



**Definición 1. Notación factorial.** Definimos y para

**Ejemplo 7.** Simplificar las siguientes expresiones:

**Ejemplo 8.** Escribir en términos de la notación factorial las siguientes expresiones.

* .

Multiplicando y dividiendo por obtenemos:

**Solución.** Tomando en cuenta que el número anterior a es y multiplicando y dividiendo por obtenemos que

**Solución.** Multiplicando y dividiendo por obtenemos

**Ejercicios.**

1. Simplificar las expresiones

Respuesta: 6720

1. .

Respuesta: 210

1. .

Respuesta: 51480

1. Escribir con la notación factorial las expresiones

Respuesta: 14!/11!

Respuesta: 4!/7!

**Tema 1.2.1. Permutaciones.**

**Motivación del tema.** Las permutaciones nos ayudana calcular probabilidades cuando utilizamos la fórmula de Laplace

,

pero en que contar los casos favorables es difícil de hacer. Por ejemplo, considérese el experimento en que se forman 20 casillas y asignamos una casilla a cada una de 20 personas. En la primera casilla anotamos el número del día en que la primera persona cumple años( los días se enumeran del 1 al 365 ), en la segunda casilla anotamos la fecha de cumpleaños de la segunda persona, etc. Por ejemplo, la 20-ada siguiente es un caso

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 10 | 34 | 80 | 100 | 136 | 178 | 200 | 45 | 245 | 300 | 34 | 6 | 1 | 57 | 266 | 177 | 9 | 5 | 8 |

y se interpreta diciendo que la primera persona cumple años el 2° día del año, la segunda persona cumple años el 10° día del año, etc. Y observe que el orden en que se ponen los números es importante, pues la siguiente 20-ada es diferente a la anterior

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 10 | 2 | 34 | 80 | 100 | 136 | 178 | 200 | 45 | 245 | 300 | 34 | 6 | 1 | 57 | 266 | 177 | 9 | 5 |

Ahora el significado es que el cumpleaños de la primera persona cayó en el 10° día, el cumpleaños de la segunda persona cayó en el 2° día, etc.

Si se ignoran los años bisiestos y se supone que hay 365 distintos cumpleaños posibles, encuentre la probabilidad de que cada una de las 20 persona tenga diferente cumpleaños

**Solución:** Los casos posibles los calculamos utilizando el principio fundamental del conteo como sigue:

El cumpleaños de la 1ª persona puede caer en cualquiera de los 365 días.

El cumpleaños de la 2ª persona puede caer en cualquiera de los 365 días.

El cumpleaños de la 3ª persona puede caer en cualquiera de los 365 días.

El cumpleaños de la 20ª persona puede caer en cualquiera de los 365 días.

entonces el número de casos posibles es

.

Ahora los casos favorables están formados por todas las 20-adas en que las 20 personas tienen cumpleaños diferentes. Debemos entonces formar todas 20-ádas metiendo 20 de los 365 días del año sin que se repitan los días en las celdas. Para contar cuántos casos hay es donde utilizamos las permutaciones. Empecemos mostrando un caso favorable al evento

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2 | 10 | 34 | 80 | 100 | 136 | 178 | 200 | 45 | 245 | 300 | 34 | 6 | 1 | 57 | 266 | 177 | 9 | 5 | 8 |

Interpretamos esta 20-ada diciendo que la persona 1 cumple años el 2° día del año, la persona 2 cumple años el 10° día, etc. Lo primero que debemos observar es que en esta 20-ada no hay repetición de días. Siguiendo este procedimiento podemos formar más 20-adas, ¿pero cuántas podemos formar?

El conteo de los casos favorables consiste en realizar el siguiente proceso:

en la primera celda podemos poner cualquiera de los 365 días, en la segunda celda podemos poner cualquiera de los 364 días restantes( pues no podemos utilizar el día que usamos para la celda uno ), en la tercera celda podemos poner cualquiera de los 363 días restantes ( pues no podemos utilizar los días que utilizamos para las dos primeras celdas ) continuando con este proceso en la celda 20 podemos poner cualquiera de los 346 días restantes ( pues ya utilizamos 19 días para llenar las primeras 19 celdas ) entonces por el principio fundamental del conteo el total de 20-ádas en las que no hay días repetidos es

Esta fórmula la podemos escribir en términos del factorial multiplicando y dividiendo por 345! para obtener

La última fórmula corresponde a las permutaciones de los 365 días tomando 20 a la vez y se denota por

Así la respuesta a nuestro problema es

**Definición 2**. Cualquier ordenamiento de objetos tomados de un total de objetos se denomina una *permutación de objetos tomando a la vez.* Denotamos por al número de permutaciones. Puede suceder que , en este caso se habla de las permutaciones de objetos tomando todos a la vez.

**Ejemplo 7.**  Encuentre el número de permutaciones de seis objetos, por ejemplo A, B, C, D, E, F, tomando tres a la vez. En otras palabras, encuentre el número de “palabras de tres letras”, utilizando solamente las letras dadas sin repeticiones.

**Solución.** Sea la palabra general de tres letras representada por las tres casillas siguientes:

6

5

4

La primera letra puede seleccionarse en 6 formas diferentes. Enseguida, la segunda letra puede seleccionarse de 5 formas diferentes, porque debemos quitar la letra que ocupamos para llenar el primer lugar. Después, la última letra puede seleccionarse en 4 formas diferentes. Entonces por el principio fundamental del conteo, hay 6\*5\*4 = 120 palabras de tres letras posibles sin repeticiones de las seis letras, o hay 120 permutaciones de seis objetos tomados tres a la vez.

**Teorema 1. Derivación de la fórmula para** . El número de permutaciones de objetos tomando a la vez es

**Demostración.** Se sigue el procedimiento del ejemplo anterior. El primer elemento puede ser seleccionado en  formas diferentes; en seguida, el segundo elemento en la permutación puede ser seleccionado en formas. Continuando de esta manera, se tiene que el (último) elemento en la permutación puede ser seleccionado en formas( pues ya utilizamos objetos). Por tanto, por el principio fundamental de conteo, se tiene:

Esta expresión se puede simplificar multiplicando y dividiendo por

**Corolario 1.** Hay permutaciones de objetos tomando todos a la vez.

**Demostración.**

**Ejemplo 8.** En una biblioteca se quieren acomodar 4 libros de matemáticas, 6 libros de física y 2 libros de química. ¿Cuántos ordenamientos diferentes son posibles si ( a) los libros de cada materia deben quedar juntos, (b) solo los libros de matemáticas deben quedar juntos?

**Solución.** (a) Los libros de matemáticas se pueden ordenar de formas, los de física se pueden ordenar de formas y los de química de formas. Después el número de formas en que se pueden ordenar las 3 materias es , por lo tanto el número de formas en que se pueden ordenar los libros si los libros de cada materia deben quedar juntos es por el principio fundamental del conteo

(b) Consideremos los cuatro libros de matemáticas como un solo libro. Entonces tenemos 9 libros, los cuales podemos acomodar de 9! formas. Pero los libros de matemáticas entre ellos los podemos ordenar de formas entonces el número de formas en que podemos ordenar los libros manteniendo juntos a los de matemáticas es por el principio fundamental del conteo

**Ejercicios.**

1. Se necesita sentar 5 hombres y 4 mujeres en fila, de manera que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras pueden sentarse?

Respuesta: 2880

1. Para abrir una cerradura de combinación se requiere de la selección de un conjunto de 4 dígitos en sucesión. Los dígitos se fijan girando el tambor alternativamente en el sentido de las manecillas del reloj y en el sentido opuesto. Supóngase que no se utiliza el mismo dígito 2 veces. Encuentre el número total de las posibles combinaciones. (se incluye el 0)

Respuesta: 5040

1. ¿Para cuál valor de es ?

Respuesta: 5

**Teorema 2.** El número de permutaciones de objetos de los cuales son iguales, son iguales, . . . , es igual a:

**Demostración.** Basta entender que

es el número de permutaciones como si los objetos fueran diferentes y sabemos que dicho número de permutaciones es Esto se debe porque al multiplicar por estamos pensando que los objetos iguales son diferentes y estamos obteniendo las diferentes permutaciones de ellos. Lo mismo sucede con los otros objetos iguales.

**Ejemplo 9**. Podemos observar lo que estamos diciendo en la demostración del teorema 2 con el siguiente ejemplo. Supongamos que se desea formar todos los arreglos diferentes de 5 letras a partir de la palabra “*BABBY*” el número de tales arreglos lo denotamos por y que se lee como el número de permutaciones de 5 letras en las que 3 son iguales. Estas permutaciones son:

AYBBB, ABYBB, ABBBY, ABBYB, YABBB, YBABB, YBBAB, YBBBA, BAYBB, BABYB

BABBY, BYABB, BYBAB, BYBBA, BBAYB, BBABY, BBYAB, BBYBA, BBBAY, BBBYA

Podemos obtener estas permutaciones con el siguiente diagrama de árbol. Ponemos sólo algunos caminos. El árbol inicia escribiendo las 3 opciones , si nos vamos por entonces después tenemos 3 opciones . Si nos vamos por entonces ya ocupamos las 3 disponibles y entonces ya solamente tenemos la opción . Si nos vamos por ya solamente podemos escribir y la permutación que obtenemos es , pero si escogemos ya solamente podemos poner y la permutación que obtenemos es . En el caso de que al inicio hubiésemos escogido entonces a continuación solamente podemos escribir y si escogemos entonces después solamente podemos poner puras para obtener la permutación .

Si les ponemos sub-índices a las B’s, entonces tenemos 5 letras diferentes y el número de permutaciones de estas 5 letras es 5! = 120. Dentro de las 120 permutaciones está el caso de las 6 permutaciones siguientes que producen la misma palabra cuando se retiran los subíndices:

*B1B2B3AY, B1B3B2AY, B2B1B3AY, B2B3B1AY, B3B1B2AY, B3B2B1AY*

El 6 resulta del hecho de que hay 3! = 3\*2\*1 = formas diferentes de ordenar las tres B en las tres primeras posiciones en la permutación. Esto es cierto para cada ordenamiento diferente. En consecuencia se cumple la siguiente relación

Despejando se obtiene el resultado

A continuación presentamos en la primera columna las permutaciones diferentes y en las columnas los 6 ordenamientos intercambiando las B’s:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | AYBBB | AY | AY | AY | AY | AY | AY |
|  | ABYBB | A | A | A | A | A | A |
|  | ABBBY | A | A | A | A | A | A |
|  | ABBYB | A | A | A | A | A | A |
|  | YABBB | YA | YA | YA | YA | YA | YA |
|  | YBABB | Y | Y | Y | Y | Y | Y |
|  | YBBAB | Y | Y | Y | Y | Y | Y |
|  | YBBBA | Y | Y | Y | Y | Y | Y |
|  | BAYBB |  |  |  |  |  |  |
|  | BABYB |  |  |  |  |  |  |
|  | BABBY |  |  |  |  |  |  |
|  | BYABB |  |  |  |  |  |  |
|  | BYBAB |  |  |  |  |  |  |
|  | BYBBA |  |  |  |  |  |  |
|  | BBAYB |  |  |  |  |  |  |
|  | BBABY |  |  |  |  |  |  |
|  | BBYAB |  |  |  |  |  |  |
|  | BBYBA |  |  |  |  |  |  |
|  | BBBAY |  |  |  |  |  |  |
|  | BBBYA |  |  |  |  |  |  |

**Ejemplo 11.** Encuentre el númerode palabras de siete letras que pueden formarse utilizando las letras de la palabra “*BENZENE*”.

**Solución.** Se busca el número de permutaciones de siete objetos de las cuales tres son iguales, las tres *E*, y dos son iguales, las dos *N.* Mediante el Teorema 2

**Ejercicios.**

1. En una línea están acomodadas 5 canicas rojas, 2 blancas y 3 azules. Si las canicas del mismo color no pueden diferenciarse entre sí, ¿cuántos arreglos diferentes se pueden hacer? Escriba 5 de esos arreglos.
2. Encuentre el número de palabras de 9 letras que pueden formarse utilizando las letras de la palabra *Tennessee.* ¿Cuántas palabras de 4 letras se pueden formar?

Respuesta: 3780,

1. Encuentre el número de formas en que 5 libros grandes, 4 libros medianos y 3 libros pequeños se pueden colocar en una repisa de manera que todos los libros del mismo tamaño estén juntos.

Respuesta: 103 680

**Definición 3. Muestras Ordenadas**. Cuando se seleccionan elementos, uno después de otro, de un conjunto *S*, a la selección se le denomina una muestra ordenada de tamaño .

**Definición 4**. **Muestreo con reposición**: Cuando el elemento escogido se remplaza en el conjunto *S* antes de seleccionar el siguiente elemento.

**Teorema 3**. Si el conjunto tiene elementos entonces el número de muestras, de tamaño , con reposición es .

**Demostración.** Puesto que hay *n* formas diferentes de seleccionar cada elemento (se permiten las repeticiones) el principio de multiplicación nos dice que el número de muestras ordenadas con reposición de tamaño son

**Ejemplo 12.** Si una moneda se lanza 4 veces el número de elementos del espacio muestral es .

**Ejemplo 13.** Si un dado se lanza 3 veces el espacio muestral tiene elementos.

**Definición 5.** Muestreo sin reposición: Aquí el elemento seleccionado no se remplaza en el conjunto *S* antes de seleccionar el siguiente elemento.

**Teorema 4.** Si el conjunto tiene elementos entonces el número de muestras sin reposición de tamaño es .

**Demostración.** Se puede seleccionar de formas el primer elemento de la muestra, el segundo elemento de la muestra se puede seleccionar de formas y así sucesivamente. Entonces el número de muestras de tamaño formadas de un conjunto con elementos, según el principio básico del conteo son:

**Ejemplo 14.** Tres cartas se escogen sucesivamente de un naipe de 52 cartas encuentre el número de formas en que esto puede hacerse: (a) con reposición, (b) sin reposición.

**Solución (a):** Puesto que cada carta se remplaza antes de escoger la siguiente carta, cada carta puede seleccionarse de formas. Por lo tanto el número de muestras ordenadas de tamaño con reposición son:

**Solución (b):** Puesto que no hay reposición, la primera carta debe seleccionarse en 52 formas la segunda en 51 y la tercera en 50 formas. Por lo tanto el número de muestras ordenadas diferentes de tamaño *r*=3 sin reposición son:

**Ejemplo 15.** ¿Cuántas ensaladas diferentes se pueden hacer con lechuga, escarola, endibia, berro y achicoria?

**Solución.** Las ensaladas se obtienen de incluir o no a un vegetal. Si tomamos entonces la respuesta se obtiene sacando todas las muestras con reposición de de tamaño 5 y este número es , pero a este número le debemos quitar el caso cuando no incluimos ningún vegetal, así que la respuesta es . Podemos visualizar las diferentes ensaladas con un diagrama de árbol, denotemos por la lechuga, la escarola, la endibia, el berro y por la achicoria entonces vamos construyendo el árbol metiendo un vegetal a la vez y dependiendo de si el vegetal se incluye o no en la ensalada. Si el vegetal no se incluye dejamos un espacio vacio

**Ejercicios.**

1. Una mujer se quejó de discriminación por parte de una compañía, por el hecho de ser mujer. La junta, compuesta de 5 mujeres y 3 hombres, votó 5-3 a favor de la demandante, las 5 mujeres votaron a favor y los 3 hombres en contra. El abogado representante de la compañía apeló la decisión de la junta alegando parcialidad de los miembros de la Junta, sería razonable concluir que cualquier grupo de 5 miembros de la Junta votara a favor de la demandante con la misma probabilidad. Si esto fuera cierto, ¿cuál sería la probabilidad de que el voto se dividiera de acuerdo con los sexos(las 5 mujeres a favor, los 3 hombres en contra)?

Respuesta: 1/56.

Ayuda: calcule

1. Se sacan, con remplazo, una tras otra 2 canicas de una caja que contiene 10 canicas rojas, 30 blancas, 20 azules y 14 anaranjadas. Encuentre la probabilidad de que (a) ambas sean blancas, (b) la primera sea roja y la segunda blanca, (c) ninguna sea anaranjada, (d) sean roja o blanca o ambas (roja y blanca), (e) la segunda no sea azul, (f) la primera sea anaranjada.

Respuesta: (a) 4/25, (b) 4/75, (c) 16/25, (d) 64/225, (e) 11/15, (f) 1/5.